

ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 10/09/12

- (1) Stabilire se esiste ed eventualmente calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{(0, +\infty)} \frac{e^{-x^2}}{1 + (x - n)^2} dx .$$

Sol.:

$$f_n(x) = \frac{e^{-x^2}}{1 + (x - n)^2} \rightarrow 0, \forall x \in (0, \infty)$$

inoltre

$$0 \leq f_n(x) \leq e^{-x^2}, \forall x \in (0, \infty)$$

che è integrabile su $(0, \infty)$.

Per il teorema di convergenza dominata

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{(0, +\infty)} \frac{e^{-x^2}}{1 + (x - n)^2} dx = 0 .$$

- (2) Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura finito. Sia f una funzione misurabile nonnegativa su X . Sia $1 < p < \infty$ e sia p' il suo esponente coniugato. Si ponga

$$\nu(E) = \int_E f d\mu, \forall E \in \mathcal{A} .$$

Provare:

- (a) se $f \in L^p(X)$, allora

$$\nu(E) \leq \mu(E)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_p, \forall E \in \mathcal{A} ,$$

- (b) se vale

$$\nu(E) \leq \mu(E)^{\frac{1}{p'}}, \forall E \in \mathcal{A} ,$$

allora $f \in L^q(X)$ per ogni $q < p$.

Sol: (a) diretta conseguenza della disuguaglianza di Hölder.

(b) Sia, per ogni $t > 0$, $E_t = \{f > t\}$ e $\mu(t) = \mu(E_t)$. Per la disuguaglianza di Chebishev, $t\mu(t) \leq \nu(E_t)$ e quindi, per l'ipotesi, $t\mu(t) \leq \mu(t)^{\frac{1}{p'}}$ ovvero $\mu(t) \leq t^{-p}$.

Ricordiamo che

$$\int_X f^q d\mu = \int_0^\infty t^{q-1} \mu(t) dt$$

da cui, se $q < p$,

$$\int_X f^q d\mu \leq \int_0^1 t^{q-1} \mu(X) dt + \int_1^\infty t^{q-1-p} dt < \infty .$$

- (3) Si ponga $\mathbb{R}_+^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u, v > 0\}$. Sia f integrabile su \mathbb{R}_+^2 . Stabilire se la funzione

$$f(e^{x+y}, e^{y-x})e^{2y}$$

è integrabile su \mathbb{R}^2 .

Sol.: L'applicazione $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ data da $\Phi(x, y) = (e^{x+y}, e^{y-x})$ è un diffeomorfismo. La tesi segue dalla regola del cambiamento di variabili per l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} f(u, v) du dv = \int_{\mathbb{R}^2} f(\Phi(x, y)) |\det D\Phi(x, y)| dx dy .$$